

Разумные финансовые стратегии в ставках на спорт.

Что лучше ординар или экспресс.

Марьин Олег Павлович. Москва. 2010 г.

Этот вопрос очень часто задают друг другу игроки на форумах и неоднократно по этому поводу разгорались дискуссии. Предпочтение отдается иногда ординарным ставкам, иногда экспрессу, так как если две ставки обе имеют перевес, то перевес экспресса чуть выше, чем даже сумма перевесов двух ставок. В самом деле, перевес экспресса равен $r_e = (k_1 k_2 p_1 p_2 - 1)$, а перевесы ставок равны $r_1 = (k_1 p_1 - 1)$ и $r_2 = (k_2 p_2 - 1)$. Из этих соотношений следует, что

$$r_e = r_1 + r_2 + r_1 r_2 \quad (1)$$

Например, если перевес обеих ставок равен 5%, то перевес экспресса будет равен 10.25%. То есть, перевес экспресса чуть больше чем сумма перевесов двух ставок. Правда сам перевес определяет возможную прибыль только вместе с оборотом. Коэффициент экспресса существенно больше коэффициентов ординаров. Поэтому, для того, чтобы риск просадки банка оставался приемлемым, мы должны уменьшить сумму ставки экспресса и оборот будет меньше. То есть, сравнить просто по перевесу не удастся.

Далее будет написано достаточно много формул для тех, кому интересны выкладки, которые привели меня к некоторым выводам, сделанным в конце статьи. Те, кто не хочет разбираться во внутренностях обоснования выводов, могут сразу идти в конец статьи для ознакомления с самими выводами.

Так что же все-таки лучше, как это все оценить? Можно попытаться привлечь для оценки критерий Келли. Он добавляет необходимую связь между перевесом и суммой ставки. Мы сравним как среднюю прибыль со ставок в различных вариантах, так и экспоненциальную скорость роста банка, которая, собственно говоря, максимизируется при оптимизации по Келли.

Сначала рассмотрим две ставки с одинаковыми коэффициентами, равными 2 и одинаковыми перевесами r . Принципиально это не играет роли – то есть основные свойства ситуации удастся определить. Вот формула зависимости средней ожидаемой (МО) прибыли от перевеса $w = \frac{r^2 B}{(k-1)}$ для одной ставки, где r - перевес, k - коэффициент ставки, w – мат. ожидание прибыли. Эта зависимость рассмотрена в одной из предыдущих статей серии *Разумные финансовые стратегии в ставках на спорт*. У нас k будет пока равно 2, поэтому формула упрощается : $w = r^2 B$. Мы рассматриваем два случая, где сумма ставок не произвольна, а определяется критерием оптимальности, то есть мы не можем ее менять. Поэтому нужно сравнивать не прибыль с оборота, а прибыль со ставок. В самом деле, зачем нам сравнивать прибыль с оборота, если мы не можем его увеличить.

Если мы сделаем две ординарные ставки с коэффициентом 2 и одинаковым перевесом последовательно и оптимально по Келли, то средняя прибыль на двух ставках будет равна

$$w = (1 + r^2)(1 + r^2) - 1 = r^2 + r^2 + r^2 r^2 = 2r^2 + r^4. \quad (2)$$

Если мы сделаем ставку экспресс, то его перевес будет $2r + r^2$ (см. формулу 1), то средняя прибыль от нее будет равна

$$w = \frac{(2r+r^2)^2}{(k_e-1)} = \frac{4r^2+4r^3+r^4}{3} \quad (3)$$

Из сравнения формул (2) и (3), следует, что в первом (достаточном) приближении средняя прибыль с двух ординарных ставок будет равна $2r^2$, а с экспресса = $4 \frac{r^2}{3}$. То есть средняя прибыль с экспресса будет меньше, чем с двух ординаров, при оптимальных по Келли ставках, где- то на 30%.

Теперь сравним экспоненциальную скорость роста. Пусть перевес каждой ставки будет 5%. Для двух последовательных ординаров экспоненциальная скорость роста равна $2(p \ln(1 + r) + (1 - p) \ln(1 - r)) = 0.002501$. Для одного экспресса оптимальная

экспоненциальная скорость роста равна $p^2 \ln(1 + r_e) + (1 - p^2) \ln(1 - \frac{r_e}{3}) = 0.001713$. То есть, по экспоненциальной скорости роста один экспресс тоже хуже двух последовательных ординаров.

Есть еще вариант, когда мы делаем ординары не последовательно, а параллельно. В этом случае сумма одновременных ставок будет равна не r , а $\frac{r}{1+r^2}$. То есть, чуть меньше. Соответственно и прибыль с двух ставок будет чуть меньше, на тот же делитель, или прибыль будет равна $2 \frac{r^2}{(1+r^2)}$. Этот результат объясним логически. Прибыль уменьшилась потому, что

1. Вторая ставка в первом случае делается при большем в (среднем) $(1 + r^2)$ раз банке.
2. Сумма каждой ставки во втором случае меньше, так как риск при двух одновременных ставка больше и требуется его слегка 'погасить'.

Теперь вычислим для примера экспоненциальную скорость роста для этого случая. Она будет равна $p^2 \ln(1 + 2f) + (1 - p^2) \ln(1 - 2f) = 0.002498$, где $f = \frac{r}{1+r^2}$. То есть, две одновременные ставки лучше экспресса, как по средней прибыли со ставок, так и по экспоненциальной скорости роста.

Этого еще недостаточно, чтобы сравнить два варианта: последовательные и одновременные ставки. Чтобы вынести окончательный вердикт, можно было бы посмотреть на вероятности просадки. Но это бы ничего, в сущности, не доказало в отношении сравнения ординаров с экспрессом. Вероятности просадки были бы разными в разных диапазонах перевесов и/или коэффициентов. И однозначное мнение было бы, скорее всего, невозможно определить. Поэтому мы поступим по-другому. В предыдущих абзацах мы коротко рассмотрели результаты двух последовательных ставок ординаров, двух одновременных ставок-ординаров и экспресса из двух ставок ординаров. А попробуем мы сделать три одновременных ставки : два ординара и их экспресс. Так делается в финансовом менеджере Stake Wizard программы Odds Wizard.

Итак, мы имеем два ординара с коэффициентом 2 и одинаковым перевесом r . Ищем оптимальные суммы трех одновременных ставок : два ординара и их экспресс. Цель: проверить основную теорему Stake Wizard и определить имеет ли смысл для увеличения экспоненциальной скорости роста игрового банка добавлять к двум одновременным ставкам-ординарам еще и их экспресс. Точнее, какая комбинация из трех ставок будет оптимальной (по Келли). Это может нам показать еще одну грань отношений между ординарами с их экспрессом в плане их сравнительной эффективности.

Я намеренно взял для проверки простой и одинаковый для двух ставок коэффициент 2, и одинаковые перевесы r обеих ставок. Это значительно упрощает выкладки, но должно сохранить основные свойства решения, например, решение должно удовлетворять основной теореме Stake Wizard.

Поскольку оба ординара имеют одинаковый коэффициент и одинаковый перевес, то оптимальные доли для двух ординаров в решении должны быть одинаковыми, в силу симметрии. Поэтому оптимизируемая функция примет вид:

$$F = p^2 \ln(1 + 2f_1 + 3f_2) + 2pq \cdot \ln(1 - f_2) + q^2 \ln(1 - 2f_1 - f_2),$$

где f_1 - сумма каждого из двух ординаров, как доля банка,

f_2 - сумма экспресса, как доля банка (коэффициент экспресса равен 4),

$$q = (1-p)$$

Ищем оптимальное решение. Для этого приравниваем нулю частные производные от максимизируемой функции по искомым суммам (долям) ставок.

$$\frac{\partial F}{\partial f_1} = \frac{2p^2}{1 + 2f_1 + 3f_2} - \frac{2q^2}{1 - 2f_1 - f_2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial f_2} = \frac{3p^2}{1 + 2f_1 + 3f_2} - \frac{2pq}{1 - f_2} - \frac{q^2}{1 - 2f_1 - f_2} = 0$$

Решение этой системы получается из несложных, но длинных выкладок и будет таким, весьма просто выглядящим:

$$f_1 = r(1 - r)$$

$$f_2 = r^2,$$

где r – это перевес обеих ставок.

При перевесе в 5% суммы ставок ординаров будут равны по 4.75% от банка, а сумма, которую нужно проставить на их экспресс будет равна 0.25% от банка. В случае одиночного оптимального использования экспресса, его сумма была бы равна около 3.3% от банка.

В основной теореме финансового менеджера Stake Wizard для всех возможных вариантов ставок-ординаров и соответствующих им экспрессов приводится значение максимально возможного (оптимального) роста игрового банка. Мы приведем его выражение не в авторской нотации, а явно обозначив в нем перевес ставок.

$$\max(\ln Z) = \sum_i^N p_i \ln(1 + r_i) + (1 - p_i) \ln\left(1 - \frac{r_i}{k_i}\right)$$

Это выражение из теоремы дает максимальный возможный (экспоненциальный) рост банка при одновременном использовании N ставок ординаров, каждая с коэффициентом k_i и перевесом r_i , а также всех возможных экспрессов с их участием. Теорема Stake Wizard обобщает и усиливает результат оптимизации по Келли для одновременных ставок тем, что допускает при одновременных ставках делать не только сами ординары, но и их всевозможные экспрессы. При этом из существующего набора ставок 'выжимается' максимум того, что из него можно выжать, путем одновременной простановки ставок.

Для двух ставок и их экспресса из нашего примера эту формулу можно проверить, подставив приведенные оптимальные суммы ставок как доли банка в оптимизируемую целевую функцию логарифм роста игрового банка. Сделав это, мы получим выражение в точности соответствующее выражению из теоремы.

Что же это нам дает для сравнения эффективности ординаров по сравнению с экспрессами. А вот что. Во-первых, можно заметить, что формула максимально достижимого (экспоненциального) роста игрового банка из теоремы Stake Wizard удивительно похожа на другую формулу, не просто похожа, а просто совпадает. Она совпадает с формулой оптимального (максимального) экспоненциального роста игрового банка для последовательной простановки только ординаров. Под последовательной простановкой ставок имеется в виду то, что прежде, чем сделать следующую ставку, Вы ждете результатов предыдущей ставки, и рассчитываете эту ставку с учетом результатов предыдущей ставки. Когда я впервые эту формулу (Stake Wizard) увидел, то в силу указанного выше совпадения, даже засомневался в ее справедливости. Для того, чтобы увидеть их идентичность, запишем эту формулу немного о другому:

$$\max(\ln Z) = \sum_i^N p_i \ln(1 + (k_i - 1)f_i) + (1 - p_i) \ln(1 - f_i), \quad \text{где } f_i = \frac{r_i}{(k_i - 1)} - \text{оптимальная сумма}$$

ставки для одиночной простановки ординара с перевесом r_i и коэффициентом k_i

Таким образом, мы можем получить один и тот же результат, если будем либо ставить только ординары последовательно, либо будем ставить ординары и их всевозможные экспрессы одновременно. Одинаковый результат в том смысле, что оптимальный экспоненциальный рост банка будет в этих двух разных случаях одинаковым. Это означает что, если мы имеем возможность проставить два ординара один после завершения другого, то никакой дополнительный экспресс нам не нужен.

Сведем результаты воедино. Пусть мы имеем два ординара с одинаковым коэффициентом 2 и одинаковыми положительными перевесами. Перевесы находятся в разумных пределах (то есть, не экстремально большие). На самом деле одинаковость коэффициентов и перевесов, я думаю, не играет особой роли, но поскольку результаты получены при этих условиях, то мы их оговариваем. Получается, что

1. Если мы имеем возможность проставить два ординара последовательно, то есть, второй ординар ставится после завершения первого и с учетом его результатов, то это будет самый оптимальный способ использования этих двух ставок. То есть, не нужно никаких экспрессов.

2. Несмотря на большой перевес экспресса, его оптимальное, но отдельное использование дает меньшую экспоненциальную скорость роста (Келли) и меньшую среднюю прибыль с экспресса (не с оборота, так как оборот определяется критерием оптимальности) по сравнению, как с последовательной простановкой ординаров, так и по сравнению с одновременной простановкой ординаров. То есть, вариант, где просто используются экспрессы, вместо ординаров, не приводит к увеличению эффективности ставок игрока, а наоборот, уменьшает ее.
3. Одновременная простановка двух ординаров оптимальным образом дает несколько худшие (при небольших перевесах отличные лишь в четвертой значащей цифре) результаты, чем последовательная оптимальная простановка ординаров.
4. Если мы не имеем возможности проставить ординары последовательно, то добавляя к двум одновременным ординарам еще и экспресс, мы можем довести эффективность такой комбинации до эффективности двух последовательных ординаров (следует из теоремы Stake Wizard). В этом случае вместо двух последовательных ставок-ординаров мы будем делать три одновременных ставки: два ординара и их экспресс с суммами, которые определяются в результате решения задачи оптимизации для этой комбинации ставок (как в критерии Келли). То есть, экспресс имеет смысл только в данной комбинации ставок, когда проставляется одновременно с ординарами. Но для небольших перевесов эта дополнительная ставка-экспресс улучшает значение фактора роста игрового банка лишь в третьем-четвертом знаке. То есть улучшения для реальных перевесов будет почти неощутимо.
5. Для коэффициентов не равных 2, который использовался выше для иллюстрации сравнения ординаров и экспресса, сравнительная эффективность экспресса и двух ординаров всегда меньше 1 (экспресс всегда хуже) и дается следующей (ниже) таблицей. Эффективность экспресса (по сравнению с двумя ординарами) дается формулой $= 2/(k+1)$.

Коэффициент одной ставки	Эффективность экспресса из двух ставок (по сравнению с двумя ординарами)
1.1	95%
1.2	90%
1.5	80%
2.	67%
5	33%
10	18%

Из таблицы видно, что на маленьких коэффициентах экспрессы почти также эффективны, как ординары.

6. Изложенные выше выводы справедливы для случая, когда сравниваются различные варианты ставок на основе критерия Келли, то есть когда Вы максимизируете экспоненциальную скорость роста игрового банка. Хотя критерий Келли редко используется при игре (в силу трудностей его применения), он может быть использован для подобного рода оценок.

Заключительное замечание. Формулы показывают, что два последовательных ординара лучше (оптимальнее) двух одновременных ординаров, которые в свою очередь оптимальнее экспресса из этих двух ординаров. Как говорится, формулы формулами, они могут неточно описывать ситуацию. Но все же почему это так, почему получились такие

выводы? На мой взгляд, это можно логически обосновать еще так. В случае двух последовательных ординаров вторая ставка делается при наличии большей информации - результат первой ставки известен, известен и реальный банк после нее. Тогда как два одновременных ординара и экспресс делаются при наличии меньшей информации. Эта дополнительная информация при двух последовательных ординарах и позволяет им получить преимущество над одновременным использованием ординаров, как в форме одновременной простановки двух ординаров, так и их использования в форме экспресса. Экспресс, в свою очередь, дополнительно теряет свой потенциал из-за того, что в некоторых случаях одна не выигранная ставка уничтожает результат, другой, сыгравшей ставки (это отметил, в частности, Pirozavt [2]). И этот эффект не покрывает того положительного момента, что в случае обеих сыгравших ставок, вторая ставка срабатывает при уже увеличенной сумме ставки экспресса. Впрочем, это только слова, реальные соотношения определяются вышеприведенными формулами и таблицами, если Вас удовлетворяют условия, при которых они получены.

Букмекерские конторы часто поощряют использование экспрессов путем предоставления на них бонусов. Хотя с другой стороны некоторые игроки жалуются, что конторы не принимают у них короткие экспрессы на низких коэффициентах. Как мы выяснили, для выигрывающих игроков использование экспрессов снижает эффективность игры и это хорошо для букмекерских контор. Для проигрывающих игроков, которых гораздо больше экспрессы, соответственно, снижают скорость потери банка, что является минусом для БК. Но в любом случае они, по-видимому, являются 'стабилизирующим' (меньше выигрываем, но меньше и проигрываем) фактором для БК, что является полезным для них свойством. Это только мое предположение, основанное на результатах анализа.

Литература.

1. Эвард Торп, Критерий Келли в блек-джеке, спортивном тотализаторе и на фондовой бирже, 1997
2. Pirozavt, Ставки, гарантирующие успех.